अध्याय **6**

अवकलज के अनुप्रयोग

6.1 समग्र अवलोकन (Overview)

6.1.1 *राशियों के परिवर्तन की दर*

फलन $y = f(x)$ के लिए $\frac{d}{dx}(f(x))$, x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को निरूपित करता है।

अत: यदि s दूरी तथा t समय को व्यक्त करते हैं तो $\frac{ds}{dt}$, समय के सापेक्ष दूरी के परिवर्तन की दर को व्यक्त करता है।

6.1.2 *स्पर्श रेखाएँ तथा अभिलंब*

किसी वक्र $y = f(x)$ को बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श करने वाली रेखा को उस बिंदु पर वक्र की स्पर्श रेखा कहते हैं तथा इसका समीकरण $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}(x - x_1)$ होता है।

स्पर्श रेखा के स्पर्श बिंदु पर लंब रेखा को वक्र अभिलंब कहते हैं तथा इसका समीकरण

$y - y_1 = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}(x - x_1)$ होता है। दो वक्रों के बीच का प्रतिच्छेद कोण वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदु पर उनकी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण होता है।

6.1.3 *सन्निकटन*

क्योंकि $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, इसलिए हम कह सकते हैं कि $f'(x)$ लगभग (approximately) $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ के बराबर है।

$\Rightarrow$ $f(x + \Delta x)$ का सन्निकट मान $= f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$

© NCERT not to be republished

6.1.4 *वर्धमान/ह्रासमान फलन*

किसी अंतराल (a, b) में एक संतत फलन $f(x)$:

(i) निरंतर वर्धमान है, यदि सभी $x_1, x_2 \in (a, b)$ के लिए $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ विकल्पत: सभी $x \in (a, b)$, के लिए $f'(x) > 0$

(ii) निरंतर ह्रासमान है, यदि सभी $x_1, x_2 \in (a, b)$, के लिए $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ विकल्पत: सभी $x \in (a, b)$, के लिए $f'(x) < 0$

6.1.5 ***प्रमेय:*** मान लीजिए कि फलन f, अंतराल $[a, b]$ पर संतत तथा अंतराल (a, b) में अवकलनीय है, तो

(i) $[a, b]$ में f वर्धमान है, यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$

(ii) $[a, b]$ में f ह्रासमान है, यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) < 0$

(iii) $[a, b]$ में f एक अचर फलन है, यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) = 0$

6.1.6 *उच्चिष्ठ एंव निम्निष्ठ*

किसी वास्तविक फलन f का स्थानीय उच्चिष्ठ स्थानीय निम्निष्ठ

किसी फलन f के प्रांत के अंतस्थ (भीतर) स्थित बिंदु c को

(i) स्थानीय उच्चिष्ठ कहते हैं, यदि एक ऐसे $h > 0$ का अस्तित्व है कि $(c - h, c + h)$ में स्थित सभी x के लिए $f(c) > f(x)$

$f(c)$ के इस मान को f का स्थानीय उच्चतम मान कहते हैं।

(ii) स्थानीय निम्निष्ठ कहते हैं, यदि एक ऐसे $h > 0$ का अस्तित्व है कि $(c - h, c + h)$ में स्थित सभी x के लिए $f(c) < f(x)$

$f(c)$ के इस मान को f का स्थानीय निम्नतम मान कहते हैं।

अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित फलन $f(x)$, $x = c$, जहाँ $c \in [a, b]$, पर उच्चिष्ठ (या निरपेक्ष उच्चिष्ठ) कहा जाता है, यदि सभी $x \in [a, b]$ के लिए $f(x) \le f(c)$

इसी प्रकार अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित फलन $f(x)$, $x = d$, जहाँ $d \in [a, b]$ पर निम्निष्ठ (या निरपेक्ष निम्निष्ठ) कहा जाता है, यदि सभी $x \in [a, b]$ के लिए $f(x) \ge f(d)$

6.1.7 ***f का क्रांतिक बिंदु*** : किसी फलन f के प्रांत में एक बिंदु c, जिस पर या तो $f'(c) = 0$ या f अवकलनीय नहीं है, f का क्रांतिक बिंदु कहलाता है।

© NCERT not to be republished

स्थानीय उच्चतम अथवा स्थानीय मान निम्नतम ज्ञात करने की व्यावहारिक विधि

(a) **प्रथम अवकलज परीक्षण**

(i) x के बिंदु c से होकर बढ़ने पर यदि $f'(x)$ का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है, तो c स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है तथा $f(c)$ स्थानीय उच्चतम मान है।

(ii) x के बिंदु c से होकर बढ़ने पर यदि $f'(x)$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है, तो c स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है तथा $f(c)$ स्थानीय निम्नतम मान है।

(iii) x के बिंदु c से होकर बढ़ने पर यदि $f'(x)$ का चिह्न परिवर्तित नहीं होता है, तो c न तो स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु है और न स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु है। इस प्रकार के बिंदु को नति परिवर्तन बिंदु कहते हैं।

(b) **द्वितीय अवकलज परीक्षण**

मान लीजिए कि f किसी अंतराल I में परिभषित एक फलन है तथा $c \in$ I मान लीजिए कि f, c पर दो बार अवकलनीय है। तब

(i) यदि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) < 0$, तो $x = c$ स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है। इस दशा में f का स्थानीय उच्चतम मान $f(c)$ है।

(ii) यदि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) > 0$, तो $x = c$ स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है। इस दशा में f का स्थानीय निम्नतम मान $f(c)$ हैं।

(iii) यदि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) = 0$, तो यह परीक्षण असफल हो जाता है। ऐसी स्थिति में, हम पुनः प्रथम अवकलज परीक्षण पर वापस जाते हैं।

6.1.8 *निरपेक्ष उच्चिष्ठ तथा/ अथवा निरपेक्ष निम्निष्ठ ज्ञात करने की व्यावहारिक विधि*

चरण 1 : प्रदत्त अंतराल में f के सभी क्रांतिक बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

चरण 2 : इन सभी बिंदुओं पर तथा अंतराल के अंत्य बिंदुओं पर f के मान का परिकलन कीजिए।

चरण 3 : चरण 2 में परिकलित मानों में से f के उच्चतम तथा निम्नतम मानों को लीजिए। उच्चतम मान f का निरपेक्ष उच्चतम मान तथा निम्नतम मान f का निरपेक्ष निम्नतम मान होगा।

6.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

उदाहरण 1 वक्र $y = 5x - 2x^3$ के लिए, यदि x में 2 इकाई/से. की दर से वृद्धि हो रही है, तो $x = 3$ पर वक्र का प्रावण्य कितनी तीव्रता से परिवर्तित हो रहा है?

© NCERT not to be republished

हल वक्र का प्रावण्य $= \frac{dy}{dx} = 5 - 6x^2$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -12x\,\frac{dx}{dt}$$

$$= -12 \,.\, (3) \,.\, (2)$$

$= -72$ इकाई/से.

अत: जब x में इकाई/से. की दर से वृद्धि हो रही है, तब वक्र की प्रवणता 72 इकाई/से. की दर से घट रही हैं।

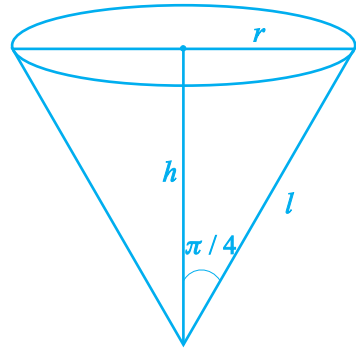
उदाहरण 2 $\frac{\pi}{4}$ अर्ध शीर्ष कोण वाले एक शांकवीय कीप (funnel) से, जिसका शीर्ष नीचे की ओर है, कीप के पृष्ठ के क्षेत्रफल में 2 cm²/sec की समान दर से उसके शीर्ष के एक छिद्र से पानी बह रहा है। पानी के सतह की तिर्यक ऊँचाई के घटने की दर उस समय ज्ञात कीजिए जब उसकी तिर्यक ऊँचाई 4cm है।

हल यदि s वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल को निरुपित करता है,

तो $\frac{ds}{dt} = 2\text{cm}^2\,/\text{sec}$

$$s = \pi\, rl = \pi\,(l\sin\frac{\pi}{4})l = \frac{\pi}{\sqrt{2}}l^2$$

इसलिए, $\frac{ds}{dt} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}l\,\frac{dl}{dt} = \sqrt{2}\pi l\,\frac{dl}{dt}$

जब $l = 4$ cm, $\frac{dl}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi.4}.2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}$ cm/s.

आकृति 6.1

उदाहरण 3 वक्र $y^2 = x$ तथा $x^2 = y$ के बीच का प्रतिच्छेद – कोण ज्ञात कीजिए।

हल प्रदत्त समीकरणों को सरल करने पर, हमें प्राप्त होता है कि $y^2 = x$ तथा $x^2 = y \Rightarrow x^4 = x$ अथवा $x^4 - x = 0$

© NCERT not to be republished

$\Rightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

इसलिए, $\quad y = 0, \; y = 1$

अर्थात (0, 0) तथा (1, 1) प्रतिच्छेद बिंदु हैं।

पुन: $y^2 = x \quad \Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

तथा $x^2 = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$

बिंदु (0, 0), पर वक्र $y^2 = x$ की स्पर्श रेखा y-अक्ष के समांतर है तथा वक्र $x^2 = y$ की स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है।

$\Rightarrow$ प्रतिच्छेद – कोण $= \frac{\pi}{2}$

बिंदु (1, 1) पर वक्र $y_2 = x$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता (m_1) $\frac{1}{2}$ है तथा वक्र $x^2 = y$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता 2 है।

अतएव $\tan\theta = \left|\frac{2-\frac{1}{2}}{1+1}\right| = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

उदाहरण 4 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \tan x - 4x$, अंतराल $\left(\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

हल $f(x) = \tan x - 4x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x - 4$

जब $\frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$, $1 < \sec x < 2$

इसलिए, $1 < \sec^2 x < 4 \Rightarrow -3 < (\sec^2 x - 4) < 0$

अत: $\frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ के लिए $f'(x) < 0$

इसलिए $\left(\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ में $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

उदाहरण 5 निर्धारित कीजिए कि x के किन मानों के लिए, फलन $y = x^4 - \frac{4x^3}{3}$ वर्धमान है तथा किन मानों के लिए, यह ह्रासमान है।

हल $y = x^4 - \frac{4x^3}{3}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2 (x - 1)$

अब, $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1.$

क्योंकि $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ के लिए $f'(x) < 0$ तथा f अंतराल $[-\infty, 0]$ और $(0, 1)$ में संतत है, इसलिए f अंतराल $(-\infty, 1]$ में ह्रासमान है और f अंतराल $[1, \infty)$ में वर्धमान है।

टिप्पणी यहाँ f अतंराल $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ में निरंतर ह्रासमान तथा $(1, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$ का कोई उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ नहीं है।

हल $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$

$f'(x) = 12x^2 - 36x + 27 = 3(4x^2 - 12x + 9) = 3(2x - 3)^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (क्रांतिक बिंदु)

क्योंकि सभी $x < \frac{3}{2}$ तथा सभी $x > \frac{3}{2}$ के लिए $f'(x) > 0$

अत: $x = \frac{3}{2}$ एक नति परिवर्तन का बिंदु है, और न तो उच्चिष्ठ का बिंदु और न निम्निष्ठ का बिंदु

© NCERT not to be republished

$x = \frac{3}{2}$ केवल एक क्रांतिक बिंदु है तथा f का कोई उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ नहीं है।

उदाहरण 7 अवकलों के प्रयोग द्वारा $\sqrt{0.082}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $f(x) = \sqrt{x}$

$x = .09$ तथा $\Delta x = -0.008$ मान लेने पर

$f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x \,.\, f'(x)$ के प्रयोग द्वारा–

$f(0.09 - 0.008) = f(0.09) + (-0.008)\, f'(0.09)$

$$\Rightarrow \sqrt{0.082} = \sqrt{0.09} - 0.008 \,.\, \left(\frac{1}{2\sqrt{0.09}}\right) = 0.3 - \frac{0.008}{0.6}$$

$= 0.3 - 0.0133 = 0.2867$

उदाहरण 8 वक्रों $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा $xy = c^2$ के लम्बकोणीय प्रतिच्छेदन के लिए प्रतिबंध ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि वक्र (x_1, y_1) पर प्रतिच्छेद करते हैं।

इसलिए $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

$\Rightarrow$ प्रतिच्छेदन बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $(m_1) = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

पुनः $xy = c^2 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \Rightarrow m_2 = \frac{-y_1}{x_1}$

लंबकोणीय प्रतिच्छेदन के लिए, $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1$ या $a^2 - b^2 = 0$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 9 फलन $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - 8x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 105$ के सभी स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

हल $f'(x) = -3x^3 - 24x^2 - 45x$

$$= -3x(x^2 + 8x + 15) = -3x(x+5)(x+3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -5, \ x = -3, x = 0$$

$$f''(x) = -9x^2 - 48x - 45$$

$$= -3(3x^2 + 16x + 15)$$

$f''(0) = -45 < 0$. इसलिए $x = 0$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदु है।

$f''(-3) = 18 > 0$. इसलिए $x = -3$ स्थानीय निम्निष्ठ बिंदु है।

$f''(-5) = -30 < 0$. इसलिए $x = -5$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदु है।

उदाहरण 10 सिद्ध कीजिए कि $x + \frac{1}{x}$ का स्थानीय उच्चतम मान उसके स्थानीय निम्नतम मान से कम है।

हल मान लीजिए कि $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{2}{x^3}$, इसलिए $\frac{d^2y}{dx^2}$ ($x = 1$ पर) > 0 तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ ($x = -1$ पर) < 0

अत: y का स्थानीय उच्चतम मान $x = -1$ पर है तथा स्थानीय उच्चतम मान $= -2$

y का स्थानीय निम्नतम मान $x = 1$ पर है तथा स्थानीय निम्नतम मान $= 2$

अत: स्थानीय उच्चतम मान (–2) स्थानीय निम्नतम मान (2) से कम है।

© NCERT not to be republished

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 11 किसी शांकवीय बर्तन के शीर्ष के एक छोटे छिद्र से, जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है, पानी 1 cu cm/sec की दर से बह रहा है। बर्तन में पानी के सतह की तिर्यक ऊँचाई के घटने की दर उस समय ज्ञात कीजिए जब तिर्यक ऊँचाई 4 cm है। शांकवीय बर्तन का शीर्ष कोण $\frac{\pi}{6}$ है।

हल दिया हुआ है कि $\frac{dv}{dt} = 1 \text{ cm}^3\text{/s}$, जहाँ v शांकवीय बर्तन में पानी का आयतन है।

आकृति 6.2 से, $l = 4\text{cm}, \; h = l\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$

तथा $r = l\sin\frac{\pi}{6} = \frac{l}{2}$

इसलिए $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\frac{l^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}l^3$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}l^2\frac{dl}{dt}$$

इसलिए, $1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}16.\frac{dl}{dt}$

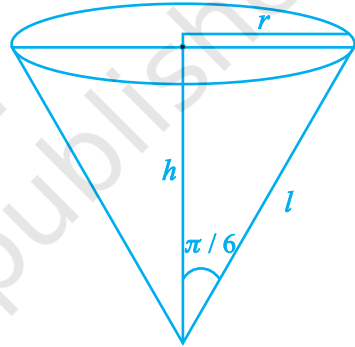
$$\Rightarrow \quad \frac{dl}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi}\text{cm/s.}$$

अत: तिर्यक ऊँचाई के घटने की दर $= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi}$ cm/s

आकृति 6.2

उदाहरण 12 वक्र $y = \cos(x + y), -2\pi \le x \le 2\pi$, की उन सभी स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 2y = 0$ के समांतर हैं।

हल दिया हुआ है कि $y = \cos(x + y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(x + y)\left[1 + \frac{dy}{dx}\right]$ ...(i)

© NCERT not to be republished

या $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$$

क्योंकि स्पर्श रेखा $x + 2y = 0$ के समांतर है, इसलिए स्पर्श रेखा की प्रवणता $= -\frac{1}{2}$

इसलिए, $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x + y) = 1$ .... (ii)

क्योंकि $\cos(x + y) = y$ तथा $\sin(x + y) = 1 \Rightarrow \cos^2(x + y) + \sin^2(x + y) = y^2 + 1$

$\Rightarrow \quad 1 = y^2 + 1$ या $y = 0$

इसलिए $\cos x = 0$

इसलिए $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2...$

अतः, $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$, परंतु $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{-3\pi}{2}$ समीकरण (ii) को संतुष्ट करते हैं।

अतः $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ उपयुक्त बिंदु है।

इस प्रकार $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ या $2x + 4y - \pi = 0$?

तथा $\left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ या $2x + 4y + 3\pi = 0$

उदाहरण 13 वक्र $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ का प्रतिच्छेद कोण ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है कि $y^2 = 4ax$...(i) तथा $x^2 = 4by$... (ii). हल करने पर

$$\left(\frac{x^2}{4b}\right)^2 = 4ax \Rightarrow x^4 = 64\, ab^2 x$$

© NCERT not to be republished

या $x(x^3 - 64\,ab^2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 4a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$

अतः (0, 0) तथा $\left(4a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}\right)$ प्रतिच्छेद -बिंदु हैं।

पुनः, $y^2 = 4ax \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y}$ तथा $x^2 = 4by \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4b} = \frac{x}{2b}$

इसलिए, (0, 0) पर वक्र $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा y-अक्ष के समांतर है, तथा वक्र $x^2 = 4by$ की स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है।

$\Rightarrow$ वक्रों के बीच का कोण $= \frac{\pi}{2}$

$\left(4a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}\right)$ पर, m_1 (वक्र (i) की स्पर्श रेखा की प्रवणता)

$$= \frac{2a}{4a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ तथा } m_2 \text{(वक्र (ii)की स्पर्श रेखा की प्रवणता)} = \frac{4a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}}{2b} = 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

इसलिए, $\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}}\right| = \frac{3a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}}{2\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)}$

अतः, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}}{2\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)}\right)$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ के किसी बिंदु पर अभिलंब का समीकरण $4(y\cos^3\theta - x\sin^3\theta) = 3\sin 4\theta$

हल यहाँ $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$

इसलिए $$\frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta = -3\sin\theta(1-\cos^2\theta) = -3\sin^3\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta = 3\cos\theta(1-\sin^2\theta) = 3\cos^3\theta$$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$. इसलिए, अभिलंब की प्रवणता $= \dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}$

अतः अभिलंब का समीकरण निम्नलिखित है,

$$y - (3\sin\theta - \sin^3\theta) = \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}[x - (3\cos\theta - \cos^3\theta)]$$

$$\Rightarrow\ y\cos^3\theta - 3\sin\theta\cos^3\theta + \sin^3\theta\cos^3\theta = x\sin^3\theta - 3\sin^3\theta\cos\theta + \sin^3\theta\cos^3\theta$$

$$\Rightarrow\ y\cos^3\theta - x\sin^3\theta = 3\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \frac{3}{2}\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta$$

$$= \frac{3}{4}\sin 4\theta$$

या $4(y\cos^3\theta - x\sin^3\theta) = 3\sin 4\theta$.

उदाहरण 15 $f(x) = \sec x + \log\cos^2 x$, $0 < x < 2\pi$ का उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

हल $f(x) = \sec x + 2\log\cos x$

इसलिए, $f'(x) = \sec x\tan x - 2\tan x = \tan x(\sec x - 2)$

© NCERT not to be republished

$f'(x) = 0 \Rightarrow \tan x = 0$ या $\sec x = 2$ या $\cos x = \frac{1}{2}$

अतः x क सम्भव मान $x = 0$, या $x = \pi$ तथा

$x = \frac{\pi}{3}$ या $x = \frac{5\pi}{3}$

पुनः, $f''(x) = \sec^2 x(\sec x - 2) + \tan x(\sec x \tan x)$

$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x - 2\sec^2 x$

$= \sec x(\sec^2 x + \tan^2 x - 2\sec x)$

हम देखते हैं कि

$f''(0) = 1(1 + 0 - 2) = -1 < 0$. इसलिए, $x = 0$ एक उच्चिष्ठ बिंदु है।

$f''(\pi) = -1(1 + 0 + 2) = -3 < 0$. इसलिए, $x = \pi$ एक उच्चिष्ठ बिंदु है।

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2(4 + 3 - 4) = 6 > 0$. इसलिए, $x = \frac{\pi}{3}$ एक निम्नष्ठ बिंदु है।

$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2(4 + 3 - 4) = 6 > 0$. इसलिए, $x = \frac{5\pi}{3}$ एक निम्नष्ठ बिंदु है।

y का $x = 0$ पर उच्चतम मान $1 + 0 = 1$ है।

y का $x = \pi$ पर उच्चतम मान $-1 + 0 = -1$ है।

y का $x = \frac{\pi}{3}$ पर निम्नतम मान $2 + 2\log\frac{1}{2} = 2(1 - \log 2)$ है।

y का $x = \frac{5\pi}{3}$ पर निम्नतम मान $2 + 2\log\frac{1}{2} = 2(1 - \log 2)$ है।

उदाहरण 16 उस महत्तम आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अंतर्गत स्थित है।

हल जैसा कि आकृति 6.3 में प्रदर्शित है, मान लीजिए कि ABCD महत्तम क्षेत्रफल का आयत है

© NCERT not to be republished

जिसकी भुजा $AB = 2x$ तथा $BC = 2y$, जहाँ $C(x, y)$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर स्थित एक बिंदु है।

आयत का क्षेत्रफल A, $4xy$ है। अर्थात् $A = 4xy$, जिससे $A^2 = 16x^2y^2 = s$ (मान लिया)

इसलिए, $s = 16x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2$

$$= \frac{16b^2}{a^2}(a^2x^2 - x^4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ds}{dx} = \frac{16b^2}{a^2}[2a^2x - 4x^3]$$

पुनः $\frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ तथा $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$

आकृति 6.3

अब $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}[2a^2 - 12x^2]$

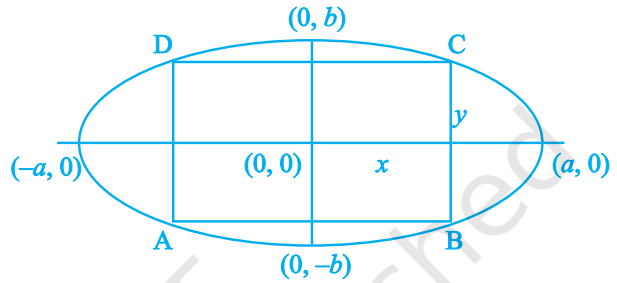
अतः $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ पर, $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}[2a^2 - 6a^2] = \frac{16b^2}{a^2}(-4a^2) < 0$

अतः $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ पर, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$, यहाँ s महत्तम है अतएव A भी महत्तम है।

महत्तम क्षेत्रफल $A = 4.x.y = 4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} = 2ab$ वर्ग इकाई

उदाहरण 17 अंतराल $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में फलन $f(x) = \sin 2x - x$, के उच्चतम तथा निम्नितम मानों का अंतर ज्ञात कीजिए।

हल $\quad f(x) = \sin 2x - x$

© NCERT not to be republished

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = 2\cos 2x - 1$$

इसलिए $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x$ is $\frac{-\pi}{3}$ या $\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ या $\frac{\pi}{6}$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

स्पष्टतया, $\frac{\pi}{2}$ उच्चतम मान है तथा $-\frac{\pi}{2}$ निम्नतम मान है।

अत: अभीष्ट अंतर $= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

उदाहरण 18 शीर्ष कोण 2θ वाला एक समद्विबाहु त्रिभुज a त्रिज्या वाले किसी वृत्त के अंतर्गत स्थित है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल उच्चतम है। जब $\theta = \frac{\pi}{6}$

हल मान लीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC त्रिज्या a वाले किसी वृत्त के अंतर्गत है, इस प्रकार कि AB = AC

AD = AO + OD = $a + a\cos 2\theta$ तथा BC = 2BD
= $2a\sin 2\theta$ (आकृति 6.4 देखिए)

इसलिए, Δ ABC का क्षेत्रफल, अर्थात् $\Delta = \frac{1}{2}$ BC . AD

© NCERT not to be republished

$$= \frac{1}{2} 2a \sin 2\theta \,.\, (a + a \cos 2\theta)$$

$$= a^2 \sin 2\theta\, (1 + \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta = a^2 \sin 2\theta + \frac{1}{2} a^2 \sin 4\theta$$

इसलिए, $\frac{d\Delta}{d\theta} = 2a^2 \cos 2\theta + 2a^2 \cos 4\theta$

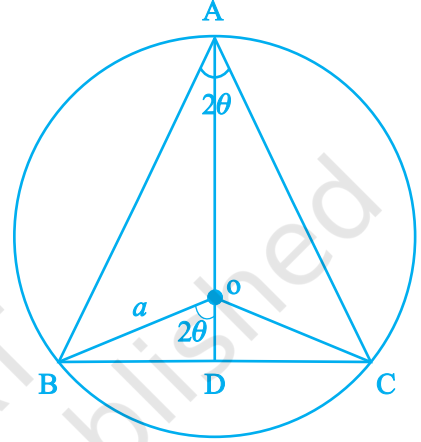
$$= 2a^2 (\cos 2\theta + \cos 4\theta)$$

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = -\cos 4\theta = \cos (\pi - 4\theta)$$

इसलिए, $2\theta = \pi - 4\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{d^2\Delta}{d\theta^2} = 2a^2 (-2\sin 2\theta - 4\sin 4\theta) < 0 \ (\theta = \frac{\pi}{6} \text{ पर})$$

आकृति 6.4

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल उच्चतम है, जब $\theta = \frac{\pi}{6}$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

निम्नलिखित उदाहरण संख्या 19 से 23 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

उदाहरण 19 वक्र $3y = 6x - 5x^3$ पर स्थित उस बिंदु का भुज, जिस पर वक्र का अभिलंब मूल बिंदु से होकर जाता है।

(A) 1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$ है।

हल मान लीजिए कि वक्र $3y = 6x - 5x^3$ पर (x_1, y_1) वह बिंदु है, जिस पर अभिलंब मूल बिंदु

© NCERT not to be republished

से होकर जाता है। तब $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 2 - 5x_1^2$ पुनः (x_1, y_1) पर मूल बिंदु से जाने वाले अभिलंब से हम प्राप्त करते हैं $2 - 5x_1^2 = \frac{-x_1}{y_1} = \frac{-3}{6 - 5x_1^2}$

क्योंकि $x_1 = 1$, इस समीकरण को संतुष्ट करता है, इसलिए सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 20 दो वक्र $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ तथा $3x^2y - y^3 = 2$

(A) एक दूसरे को स्पर्श करते हैं।

(B) समकोण पर काटते हैं।

(C) $\frac{\pi}{3}$ कोण पर काटते हैं।

(D) $\frac{\pi}{4}$ कोण पर काटते हैं।

हल पहले वक्र के समीकरण से, $3x^2 - 3y^2 - 6xy \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = (m_1)$ मान लिया तथा दूसरे वक्र के समीकरण से

$6xy + 3x^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2} = (m_2)$ मान लिया

क्योंकि $m_1 . m_2 = -1$. इसलिए सही उत्तर (B) है।

उदाहरण 21 समीकरण $x = e^t . \cos t$, $y = e^t . \sin t$ द्वारा प्रदत्त वक्र की $t = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा, x-अक्ष से कोण बनाती है।

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

हल $\frac{dx}{dt} = -e^t . \sin t + e^t \cos t$, $\frac{dy}{dt} = e^t \cos t + e^t \sin t$

© NCERT not to be republished

इसलिए $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t} = \frac{\sqrt{2}}{0}$ अतः सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 22 वक्र $y = \sin x$ के बिंदु (0, 0) पर अभिलंब का समीकरण:

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x - y = 0$ है।

हल $\frac{dy}{dx} = \cos x$. इसलिए अभिलम्ब की प्रवणता $= \left(\frac{-1}{\cos x}\right)_{x=0} = -1$. अतः अभिलंब का समीकरण

$y - 0 = -1(x - 0)$ या $x + y = 0$ है।

अतः सही उत्तर (C) है।

उदाहरण 23 वक्र $y^2 = x$ पर वह बिंदु जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष से $\frac{\pi}{4}$ कोण बनाती है।

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (C) (4, 2) (D) (1, 1) है।

हल $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

इसलिए सही उत्तर B है।

निम्नलिखित उदाहरणों 24 से 29 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

उदाहरण 24 a के वे मान जिनके लिए $y = x^2 + ax + 25$ x-अक्ष को स्पर्श करता है,_______है।

हल $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + a = 0$, अर्थात्, $x = -\frac{a}{2}$,

इसलिए, $\frac{a^2}{4} + a\left(-\frac{a}{2}\right) + 25 = 0 \Rightarrow a = \pm 10$

उदाहरण 25 यदि $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 2x + 1}$, तो इसका उच्चतम मान ________है।

© NCERT not to be republished

हल f के उच्चतम होने के लिए $4x^2 + 2x + 1$ को निम्नतम होना चाहिए, अर्थात्,

$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)$ जिससे $4x^2 + 2x + 1$ का निम्नतम मान $= \frac{3}{4}$ मिलता है।

अत: f का उच्चतम मान $= \frac{4}{3}$

उदाहरण 26 मान लीजिए कि c पर f का द्वितीय अवकलज है, इस प्रकार कि $f'(c) = 0$ तथा $f''(c) > 0$, तो c पर फलन _______है।

हल c पर फलन स्थानीय निम्नलिखित है।

उदाहरण 27 यदि $f(x) = \sin x$ तो अंतराल $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में f का निम्निष्ठ मान_____है।

हल -1

उदाहरण 28 $\sin x + \cos x$ का उच्चिष्ठ मान _____है।

हल $\sqrt{2}$.

उदाहरण 29 किसी गोले के आयतन के परिवर्तन की दर उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के सापेक्ष, जब उसकी त्रिज्या 2 cm है,_______है।

हल $1\ cm^3/cm^2$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = 4\pi r^2,\ s = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{ds}{dr} = 8\pi r \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{r}{2} = 1,\ r = 2 \text{ पर।}$$

6.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. नमक का एक गोलाकार गेंद पानी में इस प्रकार घुल रहा है कि किसी क्षण उसके आयतन के घटने की दर उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के समानुपाती है। सिद्ध कीजिए कि उसकी त्रिज्या एक अचर दर से घट रही है।

© NCERT not to be republished

2. यदि किसी वृत्त का क्षेत्रफल एक समान दर से बढ़ता है, तो सिद्ध कीजिए कि उसका परिमाप (परिधि) उसकी त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती है।

3. एक पंतग 151.5 cm की ऊँचाई पर क्षैतिज दिशा में गतिमान है। यदि पतंग की चाल 10 m/s है, तो उसकी डोर को कितनी तेज़ी से छोड़ा जा रहा है, जब उसकी दूरी पतंग उड़ाने वाले लड़के से 250 m है? लड़के की ऊँचाई 1.5 m है।

4. एक दूसरे से 45° पर झुकी हुई दो सड़कों के संधि-स्थल से दो मनुष्य A तथा B, एक ही समय v वेग से चलना प्रारम्भ करते हैं। यदि वे अलग-अलग सड़कों पर चलते हैं तो उनके परस्पर एक दूसरे से अलग होने की दर ज्ञात कीजिए।

5. कोण $\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ज्ञात कीजिए जो अपने sine से दोगुनी तेजी से बढ़ता है।

6. $(1.999)^5$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

7. एक खोखले बेलनाकार खोल, जिसकी आंतरिक तथा बाह्य त्रिज्याएँ क्रमशः 3 cm तथा 3.0005 cm हैं, में धातु के आयतन का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

8. 2 m लंबा एक मनुष्य $1\frac{2}{3}$ m/s की दर से किसी बिजली के खंभे की ओर, जो जमीन से $5\frac{1}{3}$ m ऊपर है, चल रहा है। उसकी छाया का अग्रभाग किसी दर से गतिमान है? उसकी छाया की लंबाई, उस समय किस दर से परिवर्तित हो रही है, जब वह प्रकाश के स्रोत के आधार से $3\frac{1}{3}$ m दूर है?

9. किसी तरनताल को सफ़ाई के लिए खाली करना है। यदि ताल को बंद करने के t seconds बाद ताल में पानी की मात्रा, लिटर में, L से निरूपित होती है तथा $L = 200\,(10 - t)^2$, तो 5 seconds में अंत में पानी कितनी तेजी से बाहर निकल रहा है? प्रथम 5 seconds में पानी के बाहर निकलने की औसत दर क्या है?

10. किसी घन का आयतन एक अचर दर से बढ़ रहा है। सिद्ध कीजिए कि उसके पृष्ठीय क्षेत्रफल की वृद्धि उसकी भुजा की व्युत्क्रमानुपाती है।

11. x तथा y दो वर्गों की भुजाएँ हैं, इस प्रकार कि $y = x - x^2$ दूसरे वर्ग के क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर पहले वर्ग के क्षेत्रफल के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

12. वक्र $2x = y^2$ तथा $2xy = k$ के लंबकोणीय प्रतिच्छेद के लिए प्रतिबंध ज्ञात कीजिए।

13. सिद्ध कीजिए कि वक्र $xy = 4$ तथा $x^2 + y^2 = 8$, एक दूसरे को स्पर्श करते हैं।

14. वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जिस पर स्पर्श रेखा का अक्षों से झुकाव समान है।

15. वक्र $y = 4 - x^2$ तथा $y = x^2$ का प्रतिच्छेद-कोण ज्ञात कीजिए।

16. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2 = 4x$ तथा $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ एक दूसरे को बिंदु $(1, 2)$ पर स्पर्श करते हैं।

17. वक्र $3x^2 - y^2 = 8$ के उन अभिलम्ब रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x + 3y = 4$ के समांतर हैं।

18. वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ के किन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ y-अक्ष के समांतर हैं।

19. सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, वक्र $y = b \, . \, e^{\frac{-x}{a}}$ को उस बिंदु पर स्पर्श करती है जिस पर वक्र y-अक्ष को काटता है।

20. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x + \cot^{-1}x + \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$, **R** में वर्धमान फलन है।

21. सिद्ध कीजिए कि $a \geq 1$ के लिए $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x - 2ax + b$, **R** में ह्रासमान फलन है।

22. सिद्ध किजिए कि $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, अतंराल $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में एक वर्धमान फलन है।

23. किस बिंदु पर, वक्र $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ की प्रवणता उच्चतम है? उच्चतम प्रवणता भी ज्ञात कीजिए।

24. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ का उच्चिष्ठ मान $x = \frac{\pi}{6}$ पर है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

25. यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा तथा कर्ण की लंबाईयों का योगफल दिया हुआ है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल उच्चतम है, जब उनके मध्य का कोण $\frac{\pi}{3}$ है।

© NCERT not to be republished

26. फलन $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ के स्थानीय उच्चिष्ठ, स्थानीय निम्निष्ठ तथा नति परिवर्तन के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए। साथ ही संगत स्थानीय उच्चतम तथा स्थानीय निम्नतम मानों को भी ज्ञात कीजिए।

27. किसी नगर में एक टेलीफोन कंपनी की सूची में 500 ग्राहक हैं और वह प्रत्येक ग्राहक से प्रति वर्ष 300 रु निश्चित शुल्क वसूलती हैं। कंपनी वार्षिक शुल्क बढ़ाना चाहती है, और ऐसा माना जाता है कि प्रत्येक 1रु की वृद्धि करने पर एक ग्राहक टेलीफोन सेवा लेना समाप्त कर देगा। ज्ञात कीजिए कि कितनी वृद्धि करने से महत्तम (उच्चतम) लाभ होगा।

28. यदि सरल रेखा $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ वक्र $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करती है, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha = p^2$

29. c^2 क्षेत्रफल के किसी दिए हुए गत्ते से वर्गाकार आधार का एक खुला हुआ बाक्स बनाना है। सिद्ध कीजिए कि बाक्स का महत्तम आयतन $\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$ घन इकाई है।

30. 36 cm परिमाप वाले आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए जिसे उसकी भुजाओं में से किसी एक के चारों ओर घुमाने पर अधिक से अधिक सम्भव आयतन प्रसर्प (sweep) हो।

31. यदि किसी घन तथा गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का योगफल अचर है तो घन के एक कोर (edge) तथा गोले के व्यास का अनुपात उस समय क्या है जब उनके आयतन का योगफल निम्नतम है?

32. AB किसी वृत्त का एक व्यास है तथा C उसकी परिधि पर कोई बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि Δ ABC का क्षेत्रफल महत्तम उस समय होगा जब वह समद्विबाहु है।

33. वर्गाकार आधार तथा ऊर्ध्वाधर पृष्ठ वाले धातु के किसी बाक्स में 1024 cm^3 वस्तु आती है। शीर्ष तथा आधार के पृष्ठों के माल(वस्तु) का मूल्य Rs 5/cm^2 है तथा पृष्ठों के मान का मूल्य Rs 2.50/cm^2 है। बाक्स का निम्नतम मूल्य ज्ञात कीजिए।

34. भुजा x, $2x$ और $\frac{x}{3}$ के किसी आयताकार समांतर षट्फलक तथा एक गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का योगफल अचर दिया हुआ है। सिद्ध कीजिए कि उनके आयतन का योगफल निम्नतम होगा, यदि x गोले की त्रिज्या के तीन गुने के बराबर है। उनके आयतन के योगफल का निम्नतम मान भी ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 35 से 39 तक प्रत्येक में दिए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

35. किसी समबाहु त्रिभुज की भुजाएँ 2 cm/sec की दर से बढ़ रही हैं। जब भुजा 10 cm है, त्रिभुज का क्षेत्रफल

(A) 10 cm^2/s (B) $\sqrt{3}$ cm^2/s (C) $10\sqrt{3}$ cm^2/s (D) $\frac{10}{3}$ cm^2/s

की दर से बढ़ता है।

36. एक क्षैतिज फर्श पर 5 मीटर लंबी एक सीढ़ी किसी ऊर्ध्वाधर दीवार पर झुकी है। यदि सीढ़ी का ऊपरी सिरा 10 cm/sec, की दर से नीचे की ओर फिसल रहा है तो सीढ़ी तथा फर्श के बीच का कोण, उस समय जब सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से 2 मीटर दूर है:

(A) $\frac{1}{10}$ radian/sec (B) $\frac{1}{20}$ radian/sec (C) 20 radian/sec (D) 10 radian/sec

37. बिंदु (0, 0) पर वक्र $y = x^{\frac{1}{5}}$ की

(A) एक ऊर्ध्वाधर स्पर्शी रेखा (y-अक्ष के समांतर)

(B) एक क्षैतिज स्पर्शी रेखा (x-अक्ष के समांतर)

(C) एक तिरछी स्पर्शी रेखा

(D) कोई भी स्पर्शी रेखा नहीं

38. रेखा $x + 3y = 8$ के समांतर, वक्र $3x^2 - y^2 = 8$ के अभिलंब का समीकरण है।

(A) $3x - y = 8$ (B) $3x + y + 8 = 0$

(C) $x + 3y \pm 8 = 0$ (D) $x + 3y = 0$

39. यदि वक्र $ay + x^2 = 7$ तथा $x^3 = y$, बिंदु (1, 1) पर लंबवत काटते हैं, तो a का मान है

(A) 1 (B) 0 (C) – 6 (D) .6

© NCERT not to be republished

40. यदि $y = x^4 - 10$ तथा यदि x, 2 से 1.99 तक परिवर्तित होता है, तो y का परिवर्तन क्या (कितना) है,

(A) 0.32 (B) 0.032 (C) 5.68 (D) 5.968

41. वक्र $y(1 + x^2) = 2 - x$ के, उस बिंदु पर, जहाँ यह x-अक्ष को काटती है, स्पर्श रेखा का समीकरण

(A) $x + 5y = 2$ (B) $x - 5y = 2$ (C) $5x - y = 2$ (D) $5x + y = 2$ है।

42. वे बिंदु, जिन पर वक्र $y = x^3 - 12x + 18$ की स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समांतर हैं,

(A) (2, –2), (–2, –34) (B) (2, 34), (–2, 0)

(C) (0, 35), (–2, 0) (D) (2, 2), (–2, 34) है।

43. वक्र $y = e^{2x}$ की, बिंदु (0, 1) पर, स्पर्श रेखा x-अक्ष से बिंदु

(A) (0, 1) (B) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ (C) (2, 0) (D) (0, 2) पर मिलती है।

44. वक्र $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ की, बिंदु (2, –1) पर, स्पर्श रेखा की प्रवणता

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{-6}{7}$ (D) – 6 है।

45. दो वक्र $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$ तथा $3x^2y - y^3 - 2 = 0$ किस कोण पर प्रतिच्छेद करते हैं:

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

46. वह अंतराल, जिसमें फलन $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 1$ ह्रासमान है

(A) $[-1, \infty)$ (B) $[-2, -1]$ (C) $(-\infty, -2]$ (D) $[-1, 1]$

47. मान लीजिए कि $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + \cos x$ द्वारा परिभाषित है, तो f

(A) का $x = \pi$ पर एक निम्निष्ठ है (B) का $x = 0$ पर एक उच्चिष्ठ है

(C) एक ह्रासमान फलन है (D) एक वर्धमान फलन है

© NCERT not to be republished

48. $y = x(x-3)^2$, x के नीचे दिए हुए मानों के लिए ह्रासमान है,

(A) $1 < x < 3$ (B) $x < 0$

(C) $x > 0$ (D) $0 < x < \frac{3}{2}$

49. फलन $f(x) = 4\sin^3 x - 6\sin^2 x + 12\sin x + 100$

(A) $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है (B) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है

(C) $\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ में निरंतर ह्रासमान है (D) $0, \frac{\pi}{2}$ में निरंतर ह्रासमान है

50. निम्नलिखित में से कौन-सा फलन $0, \frac{\pi}{2}$ में ह्रासमान है

(A) $\sin 2x$ (B) $\tan x$ (C) $\cos x$ (D) $\cos 3x$

51. फलन $f(x) = \tan x - x$

(A) सदैव वर्धमान है (B) सदैव ह्रासमान है

(C) कभी भी वर्धमान नहीं है (D) कभी वर्धमान है कभी ह्रासमान है

52. यदि x एक वास्तविक संख्या है, तो $x^2 - 8x + 17$ का निम्नतम मान

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 है।

53. बहुपद $x^3 - 18x^2 + 96x$ का, अंतराल [0, 9] में, निम्नतम मान

(A) 126 (B) 0 (C) 135 (D) 160 है।

54. फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ के

(A) दो स्थानीय उच्चतम बिंदु हैं (B) दो स्थानीय निम्नतम बिंदु हैं

(C) एक उच्चतम तथा एक निम्नतम है (D) कोई भी उच्चतम या निम्नतम नहीं है

© NCERT not to be republished

55. $\sin x \cdot \cos x$ का उच्चतम मान है

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

56. $f(x) = 2 \sin 3x + 3 \cos 3x$ का मान $x = \frac{5\pi}{6}$, पर

(A) उच्चतम (B) निम्नतम (C) शून्य (D) न तो उच्चतम और न निम्नतम है।

57. वक्र $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ की उच्चतम प्रवणता

(A) 0 (B) 12 (C) 16 (D) 32

58. $f(x) = x^x$ का स्तब्ध बिंदु है

(A) $x = e$ (B) $x = \frac{1}{e}$ (C) $x = 1$ (D) $x = \sqrt{e}$

59. $\frac{1}{x}^{x}$ का उच्चतम मान है

(A) e (B) e^e (C) $e^{\frac{1}{e}}$ (D) $\frac{1}{e}^{\frac{1}{e}}$

प्रश्न 60 से 64 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

60. वक्र $y = 4x^2 + 2x - 8$ तथा $y = x^3 - x + 13$ एक दूसरे को बिंदु ______पर स्पर्श करते हैं।

61. वक्र $y = \tan x$ के $(0, 0)$ पर अभिलंब का समीकरण _________है।

62. a के वे मान जिनके लिए फलन $f(x) = \sin x - ax + b$, $\mathbf{R}$ में वर्धमान है_______.हैं।

63. फलन $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$, $x > 0$, अंतराल ________में ह्रासमान है।

64. फलन $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ $(a > 0, b > 0, x > 0)$ का निम्नतम मान_______है।

© NCERT not to be republished